Mémo VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

I - GENERALITES

Soit Ω un univers.

Variable aléatoire

Définir une **variable aléatoire** sur Ω, c'est associer à chaque éventualité de Ω un unique nombre réel.

On désigne par X (Ω) *l'ensemble des valeurs possibles de* X.

Exemple 1 : On lance 3 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de piles obtenu.
L'univers est : Ω = { FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP }
Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X sont : X (Ω) = {0, 1, 2, 3}

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire définie sur Ω est dite ***discrète*** lorsque Ω est fini ou dénombrable.

En mathématiques, un ensemble est dit dénombrable, ou infini dénombrable, lorsque ses éléments peuvent être listés sans omission ni répétition dans une suite indexée par les entiers.

Exemple : $\mathbb{N}$ est dénombrable alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Exemples :
Les variables aléatoires suivantes sont des **variables aléatoires discrètes** :
- le nombre de petits par portée pour une espèce animale donnée (chat, marmotte, etc),
- le nombre de bactéries dans 100 ml de préparation,
- le nombre de voitures vendues un jour donné, *etc…*

Loi de probabilité

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction qui, à tout élément x de X (Ω), fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x (*que l'on note* P (X = x)) .

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

Valeurs prises par X : x_i			. . .	
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$			. . .	

On a : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Exemple 1 précédent : *La loi de probabilité de X est résumée dans ce tableau :*

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un ***diagramme en bâtons*** *pour visualiser la* ***distribution de probabilités***

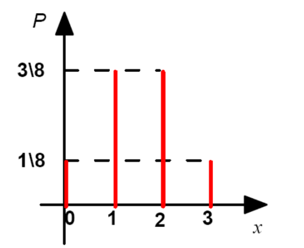


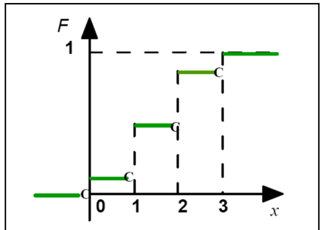
Diagramme en bâtons

Fonction de répartition

La **fonction de répartition** F d'une variable aléatoire X est la fonction de $\mathbb{R}$ vers [0 , 1] qui, à tout réel x, associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x. Donc **F (x) = P (X ≤ x)**

Exemple 1 précédent :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x) = P(X \le x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{7}{8}=1$



Fonction de répartition

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, F est une fonction en escalier, croissante. On a : $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

II - ESPERANCE MATHEMATIQUE, ECART-TYPE

Déf

On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire X le nombre : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Exemple 1 précédent : $E(X) = \frac{1}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times 1 + \frac{3}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 = \frac{12}{8} = 1{,}5$

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques, et a est un réel .
- $E(aX) = a\,E(X)$ et $E(X + a) = E(X) + a$
  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.
- On dit qu'une variable aléatoire X est ***centrée*** si et seulement si $E(X) = 0$.
  Si $m = E(X)$ alors la variable $X - m$ est centrée .

Variance

La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2$ où $m = E(X)$

Propriété : On montre que : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - m^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Ecart-type

L'**écart-type** de la variable aléatoire X est le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple précédent :

La variance de X *est :* $V(X) = \frac{1}{8}\times 0^2 + \frac{3}{8}\times 1^2 + \frac{3}{8}\times 2^2 + \frac{1}{8}\times 3^2 - 1{,}5^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$

L'écart-type de X *est :* $\sigma_X = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques , et a est un réel .
- $V(X + a) = V(X)$ et $V(aX) = a^2\,V(X)$; $\sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$.
- Si X et Y sont indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$.

III - VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

Déf

Deux variables aléatoires sont ***indépendantes*** ssi les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants , c'est-à-dire que $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.